

2.7.14 Počítání s odmocninami III

Předpoklady: 020713

Př. 1: Zjednoduš výraz $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$.

$$\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right)^3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3} \cdot \frac{b}{a}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

Př. 2: Zjednoduš výrazy:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{\sqrt{2^2}\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{\sqrt{2^3}}} = \sqrt{2\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{2^4\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{2^7} = \sqrt[8]{2^7}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{\sqrt{2^2}\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[4]{2^2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{2^4}\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt{2^5}} = \sqrt[8]{2^5}$

Pedagogická poznámka: Opět příklad na procvičení postupného upravování, orientace a odolnosti proti zbrklému rychlořešení.

A nakonec si ještě zopakujeme usměrňování zlomků.

Př. 3: Usměrní zlomky:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{3}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5-2\sqrt{6}$

$$\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{(1-\sqrt{3})+\sqrt{5}} \cdot \frac{(1-\sqrt{3})-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{3})-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{3})^2-5} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1-2\sqrt{3}+3-5} =$$

e) $= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+1} \cdot \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1} = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sqrt{5}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+1}{4 \cdot 3-1} =$
 $= \frac{7+2\sqrt{15}-3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{11}$

Př. 4: Zjednoduš výrazy:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$ b) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$ c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$

b) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$

Pedagogická poznámka: Body a) a c) počítáme společně u tabule. U bodu a) se při výkladu snažím, abychom uvažovali dopředu a přemýšleli už při usměrňování zlomku, jaký výraz by se nám hodil v čitateli (studenti mají tendenci závorky roznásobit a tím ztratí druhou mocninu. Poslední bod c) je v podstatě vychytávkou, kterou nemá šanci student, který nezná použitý trik, samostatně vyřešit. Tímto způsobem to studentům podávám s tím, že je přesto zajímavé, že při zpětném pohledu to jinak ani být nemohlo.

Př. 5: Rozhodni bez kalkulačky, který z výrazů je větší.

a) $\frac{333}{3-\sqrt{3}}$ b) $\frac{555}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$

Oba výrazy upravíme:

$$\frac{333}{3-\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 111}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3} \cdot 111}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3} \cdot 111 \cdot (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{\sqrt{3} \cdot 111 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$\frac{555}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot 111}{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{5} \cdot 111}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{5} \cdot 111 (\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{\sqrt{5} \cdot 111 (\sqrt{3}+1)}{2}$$

Oba výrazy porovnáme: $\frac{\sqrt{3} \cdot 111 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} < \frac{\sqrt{5} \cdot 111 (\sqrt{3}+1)}{2}$ (oba výrazy jsou shodné, kromě prvního čísla – vlevo je $\sqrt{3}$, vpravo $\sqrt{5}$).

Př. 6: Petáková:

strana 60/cvičení 26 d) i) k)

strana 60/cvičení 27 b)

strana 60/cvičení 28 b)

strana 60/cvičení 29 x_7

strana 61/cvičení 30 h)

strana 61/cvičení 31 a)

strana 61/cvičení 35 b) d)

strana 61/cvičení 36 b)

Shrnutí: